15

Construcciones

15.1 INTRODUCCIÓN

Las figuras geométricas se construyen con regla y compás. Como las construcciones se basan en el razonamiento deductivo, no se permiten instrumentos de medición tales como regla y transportador. Sin embargo, se puede utilizar una regla con medidas si no se toman en cuenta éstas.

En las construcciones, es recomendable planear haciendo un bosquejo de la situación; por lo general, este bosquejo revelará los pasos de construcción. Las líneas de construcción deberán ser de trazo ligero para distinguirlas de la figura requerida.

En este capítulo se detallan las siguientes construcciones:

1. Construcción de un segmento de línea congruente con un segmento de línea dado.
2. Construcción de un ángulo congruente con un ángulo dado.
3. Bisección de un ángulo dado.
4. Construcción de una línea perpendicular a una línea dada por determinado punto en la línea.
5. Bisección de un segmento de línea dado.
6. Construcción de una línea perpendicular a una línea dada por un punto externo dado.
7. Construcción de un triángulo dados sus tres lados.
8. Construcción de un ángulo de 60°
9. Construcción de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.
10. Construcción de un triángulo dados dos ángulos y el lado que comprenden.
11. Construcción de un triángulo dados dos ángulos y un lado no comprendido.
12. Construcción de un triángulo rectángulo dados su hipotenusa y un cateto.
13. Construcción de la paralela a una línea dada por un punto externo dado.
14. Construcción de una tangente a un círculo dado, en un punto en el círculo.
15. Construcción de una tangente a un círculo dado por un punto fuera del círculo.
16. Circunscripción de un círculo a un triángulo.
17. Localización del centro de un círculo dado.

18. Inscripción de un círculo en un triángulo dado.

19. Inscripción de un cuadrado en un círculo dado.

20. Inscripción de un octágono regular en un círculo dado.

21. Inscripción de un hexágono regular en un círculo dado.

22. Inscripción de un triángulo equilátero en un círculo dado.

23. Construcción de un triángulo similar a otro triángulo dado sobre un segmento de línea dado como base.

15.2 DUPLICACIÓN DE SEGMENTOS Y ÁNGULOS

Construcción 1: *Construcción de un segmento de línea congruente a un segmento de línea dado*
Dado: segmento de línea $\overline{AB}$ (Fig. 15-1)
Construyase: un segmento de línea congruente a $\overline{AB}$
Construcción: sobre la línea de trabajo w, constrúyase un arco con centro en cualquier punto C y de radio igual a AB, que intersecte a w en D. Entonces, $\overline{CD}$ es el segmento de línea pedido.

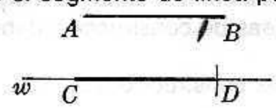

Fig. 15-1

Construcción 2: *construcción de un ángulo congruente a un ángulo dado*
Dado: $\angle A$ (Fig. 15-2)
Constrúyase: un ángulo congruente a $\angle A$
Construcción: con A como centro y un radio conveniente, constrúyase un arco (1) que intersecte los lados de $\angle A$ en B y C. Con A', un punto sobre una línea de trabajo w, como centro y el mismo radio, constrúyase un arco (2) que intersecte a w en B'. Con B' como centro y radio igual a BC, constrúyase un arco (3) que intersecte al arco (2) en C'. Trácese $A'C'$. Entonces $\angle A'$ es el ángulo pedido. ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ por s.s.s. $\cong$ s.s.s.; por lo que $\angle A \cong \angle A'$)

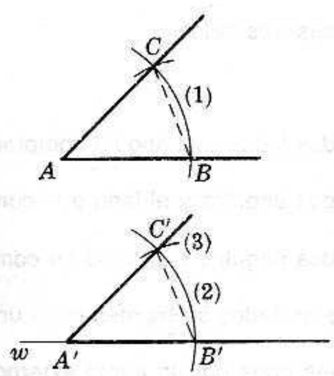

Fig. 15-2

PROBLEMAS RESUELTOS

15.1 Combinación de Segmentos de Línea

Dados los segmentos de línea con longitudes a y b (Fig. 15-3), construya segmentos de línea con longitudes iguales a: (*a*) $a + 2b$; (*b*) $2(a + b)$; (*c*) $b - a$.

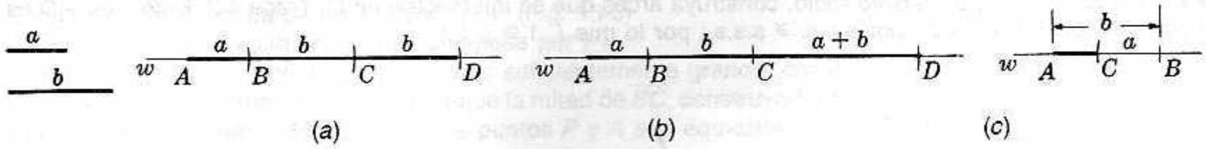

Fig. 15-3

Soluciones

Utilice la construcción 1.

(*a*) Sobre una línea de trabajo *w*, construya un segmento de línea $\overline{AB}$ con longitud *a*. Desde *B* construya un segmento de línea con longitud igual a *b*, al punto *C*; y desde *C* construya un segmento de línea con longitud *b*, al punto *D*. Entonces, $\overline{AD}$ es el segmento de línea pedido.

(*b*) Similar a (*a*). $AD = a + b + (a + b)$.

(*c*) Similar a (*a*). Primero construya $\overline{AB}$ con longitud *b*, después $\overline{BC}$ con longitud *a*. $AC = b - a$.

15.2 Combinación de Ángulos

Dado el $\triangle ABC$ en la Fig. 15-4, construya ángulos cuyas medidas sean iguales a (*a*) $2A$; (*b*) $A + B + C$; (*c*) $B - A$.

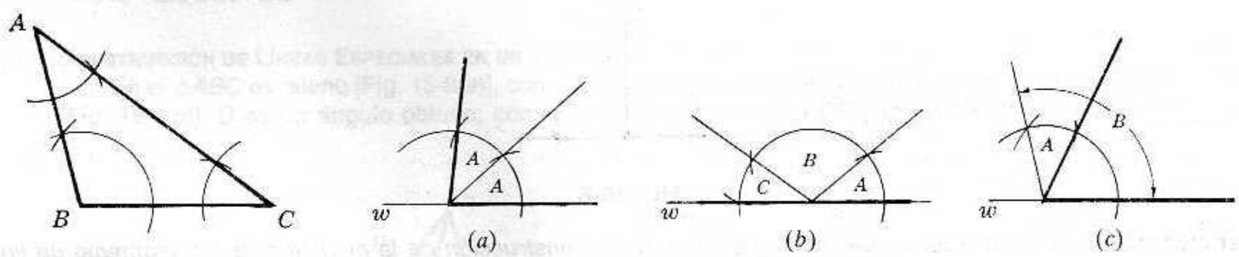

Fig. 15-4

Soluciones

Utilice la construcción 2.

(*a*) Con la ayuda de una línea de trabajo *w* como uno de los lados, duplique $\angle A$. Construya otro duplicado al $\angle A$ adyacente a $\angle A$, como se muestra. Los lados exteriores de los ángulos copiados forman el ángulo pedido.

(*b*) Con la ayuda de una línea de trabajo *w* como uno de los lados, duplíquese el $\angle A$. Construya el $\angle B$ adyacente al $\angle A$. Después construya el $\angle C$ adyacente al $\angle B$. Los lados exteriores de los ángulos *A* y *C* copiados forman el ángulo pedido. Note que el ángulo es derecho.

(*c*) Con la ayuda de una línea de trabajo *w* como uno de los lados, duplíquese el $\angle B$. Después duplíquese el $\angle A$ a partir del nuevo lado del $\angle B$, como se muestra. La diferencia es el ángulo pedido.

15.3 CONSTRUCCIÓN DE BISECTRICES Y PERPENDICULARES

Construcción 3: *bisección de un ángulo dado*
Dado: $\angle A$ (Fig. 15-5)
Construya: la bisectriz del $\angle A$

Construcción: con A como centro y un radio conveniente, construya un arco que intersecte los lados del $\angle A$ en B y C. Con B y C como centros y un mismo radio, construya arcos que se intersecten en D. Trace $\overrightarrow{AD}$. Entonces, $\overrightarrow{AD}$ es la bisectriz pedida. ($\triangle ABD \cong \triangle ACD$ por s.s.s. $\cong$ s.s.s.; por lo que $\angle 1 \cong \angle 2$.)

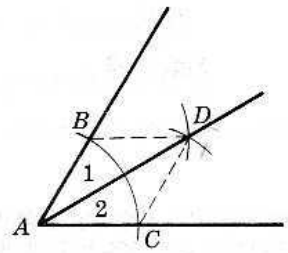

Fig. 15-5

CONSTRUCCIÓN 4: *construcción de una línea perpendicular a una línea dada a través de un punto dado sobre la línea.*
Dado: la línea w y un punto P en w (Fig. 15-6)
Construya: una perpendicular a w en P
Construcción: con la ayuda de la construcción 3, bisecte el ángulo derecho en P. Entonces, $\overrightarrow{DP}$ es la perpendicular pedida; $\overleftrightarrow{DP}$ es la línea pedida.

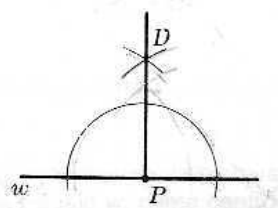

Fig. 15-6

CONSTRUCCIÓN 5: *bisección de un segmento de línea dado (construcción de la mediatriz de un segmento de línea dado).*
Dado: el segmento de línea $\overline{AB}$ (Fig. 15-7)
Construya: la mediatriz de $\overline{AB}$
Construcción: con A como centro y un radio de más de la mitad de $\overline{AB}$, construya un arco (1). Con B como centro y el mismo radio, construya el arco (2) que intersecta al arco (1) en C y D. Trace $\overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{CD}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$ pedida. (Dos puntos que equidistan cada uno de los extremos de un segmento determinan la mediatriz del segmento.)

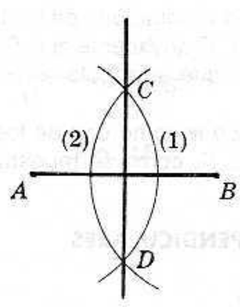

Fig. 15-7

CONSTRUCCIÓN 6: *construcción de una línea perpendicular a una línea dada a través de un punto externo dado.*
Dado: la línea w y un punto P fuera de w. (Fig. 15-8)
Construya: una perpendicular a w que pase por P
Construcción: con P como centro y radio suficientemente grande, construya un arco que intersecte a w en B y C. Con B y C como centros y el radio mayor que la mitad de $\overline{BC}$, construya arcos que se intersecten en A. Trace $\overleftrightarrow{PA}$. Entonces, $\overleftrightarrow{PA}$ es la perpendicular pedida. (Los puntos P y A son equidistantes de B y C.)

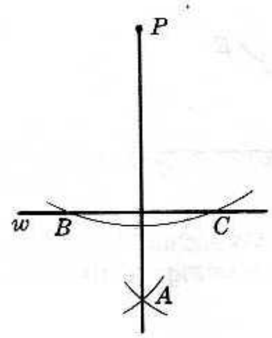

Fig. 15-8

PROBLEMAS RESUELTOS

15.3 CONSTRUCCIÓN DE LÍNEAS ESPECIALES EN UN TRIÁNGULO

En el $\triangle ABC$ escaleno [Fig. 15-9(a)], construya (a) la mediatriz de $\overline{AB}$ y (b) la mediana sobre $\overline{AB}$. En el $\triangle DEF$ [Fig. 15-9(b)], D es un ángulo obtuso; construya (c) la altura sobre $\overline{DF}$ y (d) la bisectriz del $\angle E$.

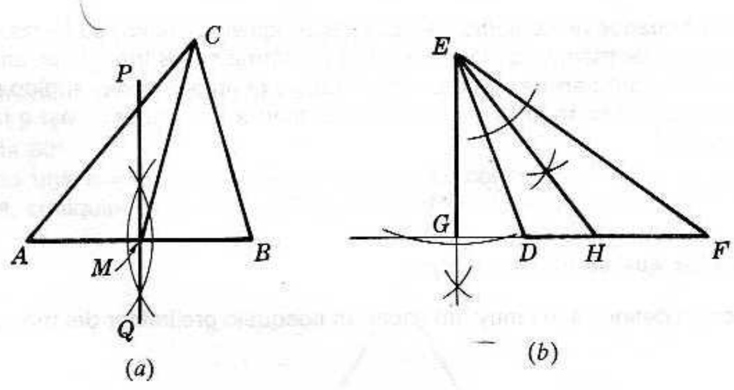

Fig. 15-9

Soluciones

(a) Utilice la construcción 5 para obtener la mediatriz $\overleftrightarrow{PQ}$ sobre $\overline{AB}$.

(b) El punto M es el punto medio de $\overline{AB}$. Trace $\overline{CM}$, la mediana sobre $\overline{AB}$.

(c) Use la construcción 6 para obtener $\overline{EG}$, la altura sobre $\overline{DF}$ (extendido).

(d) Use la construcción 3 para bisectar al $\angle E$. $\overrightarrow{EH}$ es la bisectriz pedida.

15.4 Construcción de Bisectrices y Perpendiculares para obtener los Ángulos Pedidos

(*a*) Construya ángulos que midan 90°, 45° y 135°.

(*b*) Dado un ángulo que mide *A* (Fig. 15-10), construya un ángulo cuya medida sea 90° + *A*.

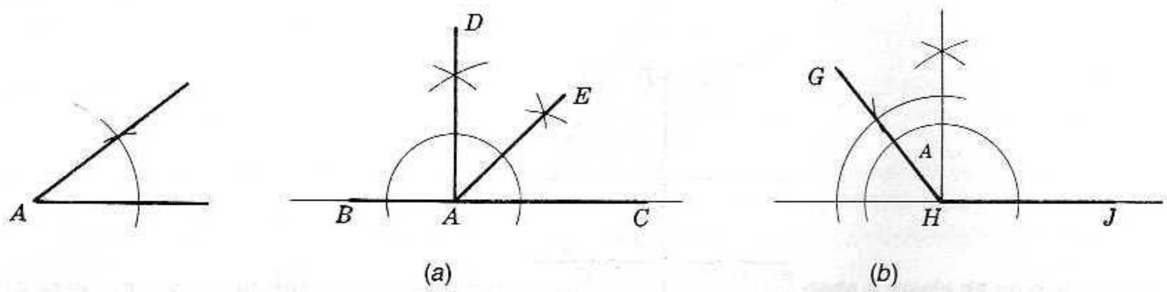

Fig. 15-10

Soluciones

(*a*) En la figura 15-10(*a*), $m\angle DAB = 90°$, $m\angle CAE = 45°$, $m\angle BAE = 135°$

(*b*) En la figura 15-10(*b*), $m\angle GHJ = 90° + A$.

15.4 CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO

15.4A Determinación de un triángulo

Un triángulo queda determinado cuando un conjunto de datos dados fija su tamaño y su forma. Como las partes necesarias para demostrar la congruencia de triángulos fijan el tamaño y la forma de los triángulos, un triángulo queda determinado cuando los datos dados consisten en tres lados, o dos lados y el ángulo comprendido por éstos, o dos ángulos y el lado común a estos ángulos, o dos ángulos y un lado no común a los dos ángulos, o la hipotenusa y cualquier cateto de un triángulo rectángulo.

15.4B Bosquejo de triángulos que se van a construir

Antes de realizar la construcción definitiva, es muy útil hacer un bosquejo preliminar del triángulo pedido. En este bosquejo:

1. Muestre la posición de cada una de las partes dadas del triángulo.
2. Trace las partes dadas con trazo fuerte, las partes restantes con trazo suave.
3. Aproxime los tamaños de las partes dadas.
4. Utilice letras minúsculas para los lados de manera que correspondan a las letras mayúsculas que designan a los ángulos opuestos.

Como ejemplo se puede realizar un bosquejo como el de la figura 15-11 antes de construir un triángulo, dados dos ángulos y un lado común a éstos.

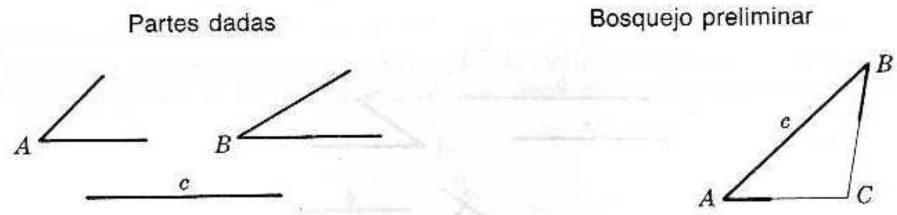

Fig. 15-11

15.4C Construcción de triángulos

CONSTRUCCIÓN 7: *construcción de un triángulo dados sus tres lados*
Dado: los lados de longitud a, b y c (Fig. 15-12)
Construya: $\triangle ABC$
Construcción: sobre una línea de trabajo w, construya $\overline{AC}$ tal que $AC = b$. Con A como centro y c como radio, construya el arco (1). Después, con C como centro y a como radio, construya el arco (2) que intersecta al arco (1) en B. Trace $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$. El $\triangle ABC$ es el triángulo pedido.

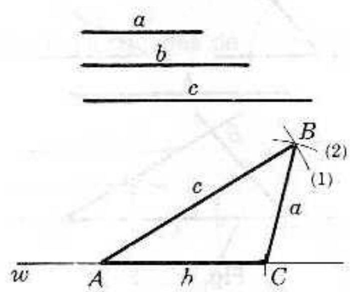

Fig. 15-12

CONSTRUCCIÓN 8: *construcción de un ángulo de 60°*
Dado: la línea w (Fig. 15-13)
Construir: un ángulo de 60°
Construcción: utilizando una longitud conveniente como lado, construya un triángulo equilátero con ayuda de la construcción 7. Entonces, cualquier ángulo del triángulo equilátero es el ángulo pedido.

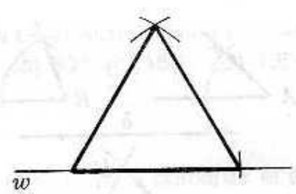

Fig. 15-13

CONSTRUCCIÓN 9: *construcción de triángulos dados dos lados y el ángulo comprendido*
Dado: $\angle A$, y los segmentos de longitudes b y c (Fig. 15-14)
Construya: $\triangle ABC$
Construcción: sobre una línea de trabajo w, construya $\overline{AC}$ tal que $AC = b$. En A, construya el $\angle A$ utilizando $\overline{AC}$ como uno de sus lados. Sobre el otro lado del $\angle A$, construya $\overline{AB}$ tal que $AB = c$. Trace $\overline{BC}$. Entonces, el $\triangle ABC$ es el triángulo pedido.

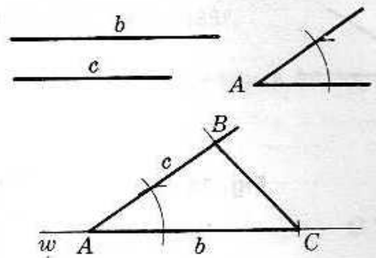

Fig. 15-14

CONSTRUCCIÓN 10: *construcción de un triángulo dado un lado y los dos ángulos adyacentes*
Dado: $\angle A$, $\angle C$ y un segmento de longitud b (Fig. 15-15)
Construya: $\triangle ABC$.
Construcción: sobre una línea de trabajo w, construya $\overline{AC}$ de modo que $AC = b$. En A construya el $\angle A$ con uno de sus lados sobre $\overline{AC}$, y en C construya el $\angle C$ con uno de sus lados sobre $\overline{AC}$. Prolongue los nuevos lados de los ángulos hasta que intersecten en B.

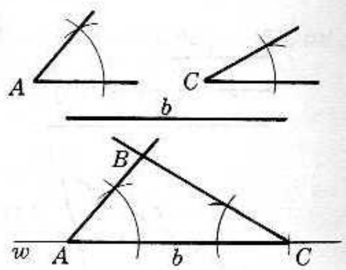

Fig. 15-15

CONSTRUCCIÓN 11: *construcción de un triángulo dados dos ángulos y un lado no incluido*
Dado: $\angle A$, $\angle B$ y un segmento de longitud b (Fig. 15-16)
Construya: $\triangle ABC$
Construcción: sobre una línea de trabajo w, construya $\overline{AC}$ de modo que $AC = b$. En C construya un ángulo de medida igual a $m\angle A + m\angle B$ de modo que la extensión de $\overline{AC}$ será uno de los lados del ángulo. El resto del ángulo derecho en C será $\angle C$. En A construya el $\angle A$ con $\overline{AC}$ como uno de sus lados. La intersección de los nuevos lados de los ángulos es B.

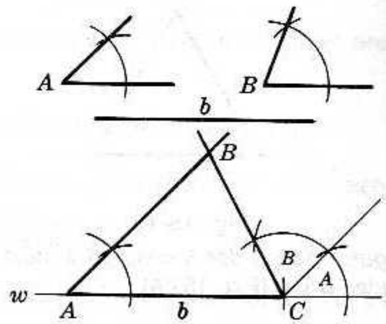

Fig. 15-16

CONSTRUCCIÓN 12: *construcción de un triángulo rectángulo dados su hipotenusa y un cateto*
Dado: hipotenusa de longitud c y un cateto de longitud b del triángulo rectángulo ABC (Fig. 15-17)

Construya: triángulo rectángulo ABC
Construcción: sobre una línea de trabajo w, construya $\overline{AC}$ de modo que $AC = b$. En C construya una perpendicular a $\overline{AC}$. Con A como centro y radio c, construya un arco que intersecte a la perpendicular en B.

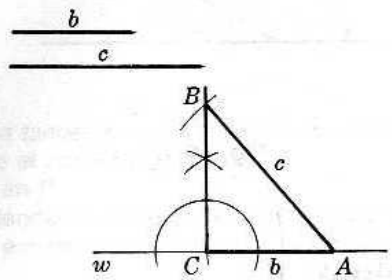

Fig. 15-17

PROBLEMAS RESUELTOS

15.5 Construcción de un Triángulo

Construya un triángulo isósceles, dadas las longitudes de su base y uno de sus lados (Fig. 15-18)

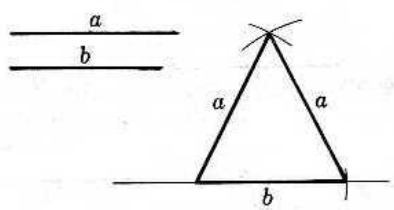

Fig. 15-18

Solución

Utilice la construcción 7, ya que se conocen los tres lados del triángulo.

15.6 Construcción de Ángulos Basados en la Construcción de un Ángulo de 60°

Construya un ángulo que mida (*a*) 120°; (*b*) 30°; (*c*) 150°; (*d*) 105°; (*e*) 75°.

Soluciones

(*a*) Utilice la construcción 8 [Fig. 15-19(*a*)] para construir el ángulo de 120° como 180° − 60°.

(*b*) Utilice las construcciones 8 y 3 para construir el ángulo de 30° como $\frac{1}{2}$(60°) [Fig. 15-19(*b*)].

(*c*) Utilice (*b*) para construir el ángulo de 150° como 180° − 30° [Fig. 15-19(*b*)].

(*d*) Utilice las construcciones 3, 4 y 8 para construir el ángulo de 105° como 60° + $\frac{1}{2}$(90°) [Fig. 15-19(*c*)].

(*e*) Utilice (*d*) para construir el ángulo de 75° como 180° − 105° [Fig. 15-19(*c*)].

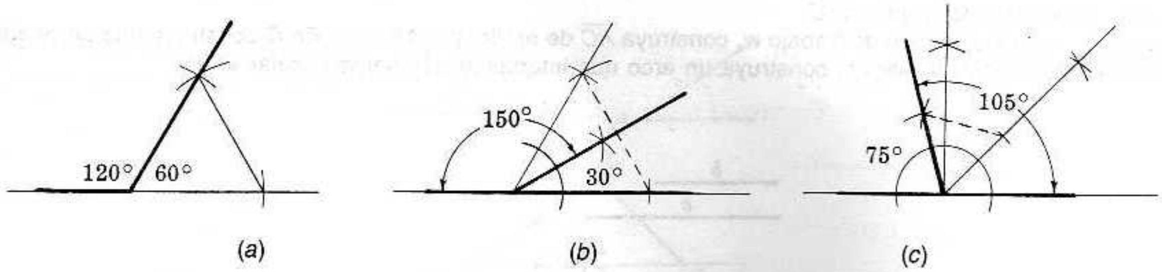

Fig. 15-19

15.5 CONSTRUCCIÓN DE LÍNEAS PARALELAS

CONSTRUCCIÓN 13: *construcción de una línea paralela a una línea dada a través de un punto externo.*
Dado: $\overleftrightarrow{AB}$ y un punto externo P (Fig. 15-20)
Construya: una línea que pase por P paralela a $\overleftrightarrow{AB}$
Construcción: trace una línea $\overleftrightarrow{RS}$ que pase por P e intersecte a $\overleftrightarrow{AB}$ en Q. Construya $\angle SPD \cong \angle PQB$. Entonces $\overleftrightarrow{CD}$ es la paralela pedida. (Si dos ángulos correspondientes son congruentes, las líneas cortadas por una transversal son paralelas.

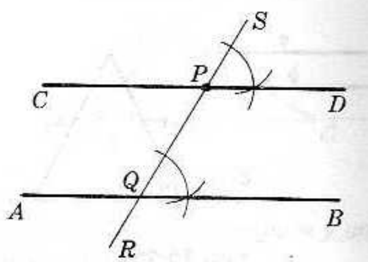

Fig. 15-20

PROBLEMAS RESUELTOS

15.7 CONSTRUCCIÓN DE UN PARALELOGRAMO

Construya un paralelogramo dadas las longitudes de dos lados adyacentes a y b y una diagonal d (Fig. 15-21)

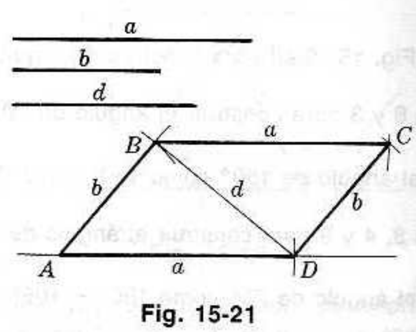

Fig. 15-21

Solución

Tres vértices del paralelogramo se obtienen construyendo el $\triangle ABD$ por medio de la construcción 7. El cuarto vértice, C, se obtiene construyendo el $\triangle BCD$ sobre la diagonal $\overline{BD}$ por medio de la construcción 7. El vértice C también puede obtenerse construyendo $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$.

15.6 CONSTRUCCIÓN DE CÍRCULOS

Construcción 14: *construcción de una tangente a un círculo dado a través de un punto sobre el círculo*
Dado: el círculo O y un punto P sobre el círculo (Fig. 15-22)
Construya: una tangente al círculo O en P
Construcción: Trace el radio $\overline{OP}$ y extiéndalo fuera del círculo. Construya $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OP}$ en P. $\overleftrightarrow{AB}$ es la tangente pedida. (Una línea perpendicular al radio en su extremo exterior es una tangente al círculo.)

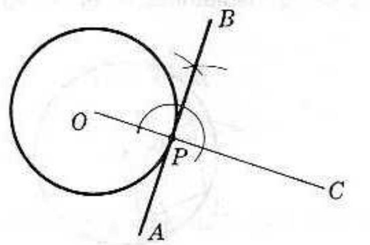

Fig. 15-22

Construcción 15: *construcción de una tangente a un círculo dado a través de un punto en el exterior del círculo.*
Dado: el círculo O y un punto P fuera del círculo (Fig. 15-23)
Construya: una tangente al círculo O desde P
Construcción: trace $\overline{OP}$ y construya un nuevo círculo O con $\overline{OP}$ como diámetro. Conecte P con A y B la intersección de los círculos O y Q. Entonces $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes ($\angle OAP$ y $\angle OBP$ son ángulos rectos, ya que ángulos inscritos en semicírculos son ángulos rectos).

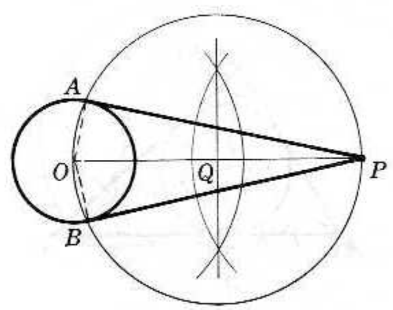

Fig. 15-23

Construcción 16: *circunscripción de un círculo a un triángulo*
Dado: el $\triangle ABC$ (Fig. 15-24)
Construya: el círculo circunscrito al $\triangle ABC$
Construcción: construya las mediatrices de dos lados del triángulo. Su intersección es el centro del círculo pedido, y la distancia a cualquier vértice es el radio. (Cualquier punto sobre la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.)

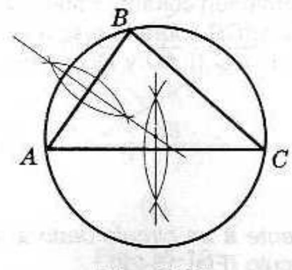

Fig. 15-24

CONSTRUCCIÓN 17: *localización del centro de un círculo*
Dado: un círculo (Fig. 15-25)
Construya: el centro del círculo dado
Construcción: seleccione tres puntos cualesquiera *A*, *B* y *C* sobre el círculo. Construya las mediatrices de los segmentos de línea $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. La intersección de estas mediatrices es el centro del círculo.

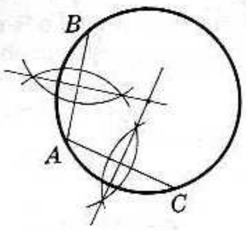

Fig. 15-25

CONSTRUCCIÓN 18: *inscripción de un círculo en un triángulo dado.*
Dado: el $\triangle ABC$ (Fig. 15-26)
Construya: el círculo inscrito en $\triangle ABC$
Construcción: construya las bisectrices de dos de los ángulos del $\triangle ABC$. Su intersección es el centro del círculo pedido, y la distancia (perpendicular) a cualquier lado es el radio. (Cualquier punto sobre la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.)

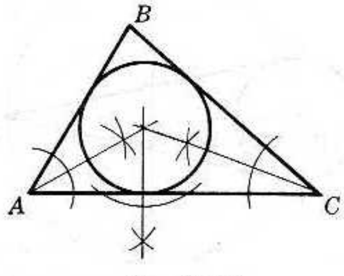

Fig. 15-26

PROBLEMAS RESUELTOS

15.8 CONSTRUCCIÓN DE TANGENTES

Una secante desde un punto *P* fuera del círculo *O* en la figura 15-27 intersecta al círculo en *B* y *A*. Construya un triángulo circunscrito al círculo de tal forma que dos de sus lados se intersecten en *P* y el tercer lado sea tangente al círculo en *A*.

Solución

Use las construcciones 14 y 15: En A construya una tangente al círculo O. Desde P construya tangentes al círculo O que intersecten la primera tangente en C y en D. El $\triangle PCD$ es el triángulo pedido.

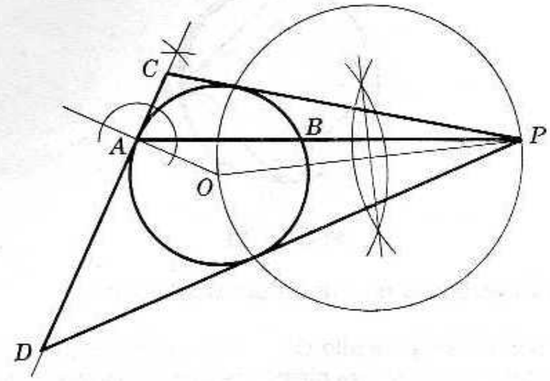

Fig. 15-27

15.9 Construcción de Círculos

Construya los círculos circunscrito e inscrito al triángulo isósceles DEF en la figura 15-28.

Solución

Use las construcciones 16 y 18. Al realizarlas, note que la bisectriz del $\angle E$ es también la mediatriz de $\overline{DF}$. Entonces, el centro de cada uno de los círculos está sobre $\overline{EG}$. Por medio de la construcción de las bisectrices del $\angle D$ o $\angle F$ se encuentra el centro del círculo inscrito I. Por medio de la construcción de las mediatrices de $\overline{DE}$ o $\overline{EF}$ se encuentra el centro del círculo circunscrito C.

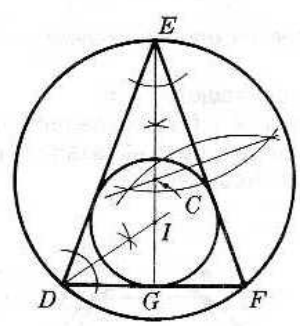

Fig. 15-28

15.7 INSCRIPCIÓN Y CIRCUNSCRIPCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES

Construcción 19: *inscripción de un cuadrado en un círculo dado.*
Dado: el círculo O (Fig. 15-29)
Construya: un cuadrado inscrito en el círculo O

Construcción: trace un diámetro, y construya otro diámetro perpendicular a éste. Una los puntos extremos de los diámetros para formar el cuadrado pedido.

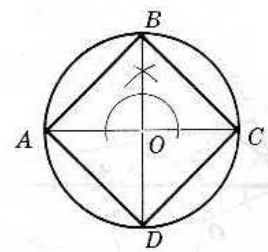

Fig. 15-29

CONSTRUCCIÓN 20: *inscripción de un octágono regular en un círculo dado*
Dado: el círculo O (Fig. 15-30)
Construya: un octágono regular inscrito en el círculo O
Construcción: como en la construcción 19, construya diámetros perpendiculares. Después, bisecte los ángulos formados por estos diámetros, dividiendo al círculo en ocho arcos congruentes. Las cuerdas de estos arcos son los lados del octágono regular pedido.

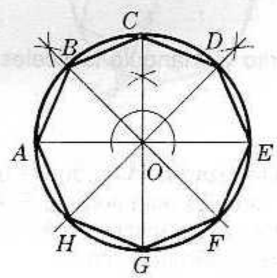

Fig. 15-30

CONSTRUCCIÓN 21: *inscripción de un hexágono en un círculo dado*
Dado: el círculo O
Construya: un hexágono regular inscrito en el círculo O
Construcción: trace el diámetro $\overline{AD}$ y utilizando A y D como centros, construya cuatro arcos que tengan el mismo radio que el círculo O y que intersecten al círculo. Construya el hexágono regular pedido uniendo consecutivamente los puntos en los cuales estos arcos intersectan al círculo.

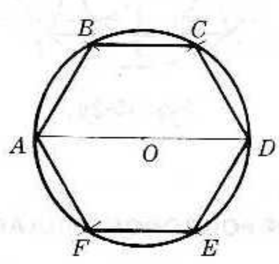

Fig. 15-31

CONSTRUCCIÓN 22: *inscripción de un triángulo equilátero en un círculo dado*
Dado: el círculo O (Fig. 15-32)

Construya: un triángulo equilátero inscrito en el circulo O.
Construcción: se obtienen triángulos equiláteros inscritos uniendo en forma alternada los seis puntos de división obtenidos en la construcción 25.

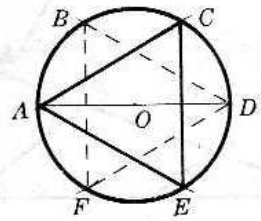

Fig. 15-32

15.8 CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS SIMILARES

CONSTRUCCIÓN 23: *construcción de un triángulo similar a un triángulo dado sobre un segmento de línea como base*
Dado: el $\triangle ABC$ y el segmento de línea $\overline{A'C'}$ (Fig. 15-33)
Construya: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ sobre $\overline{A'C'}$ como base
Construcción: sobre $A'C'$, construya $\angle A' \cong \angle A$ y $\angle C' \cong \angle C$ utilizando la construcción 2. Prolongue los otros lados hasta que se intersecten, en B. (Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, los triángulos son similares.)

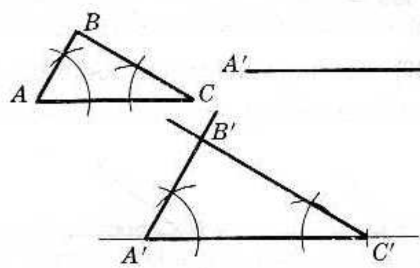

Fig. 15-33

PROBLEMAS RESUELTOS

15.10 CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS SIMILARES

Construya un triángulo similar al triángulo ABC en la figura 15-34, con una base el doble de largo que la base del triángulo dado.

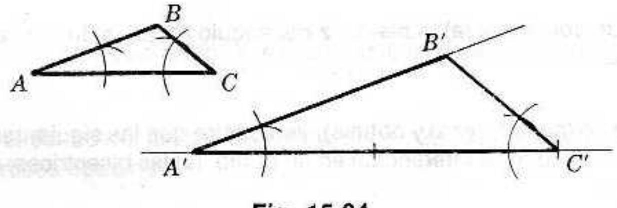

Fig. 15-34

Solución

Construya $\overline{A'C'}$ del doble de longitud que $\overline{AC}$, y luego utilice la construcción 27.

Método alterno (Fig. 15-35): prolongue dos de los lados del $\triangle ABC$ al doble de sus longitudes y una los puntos terminales.

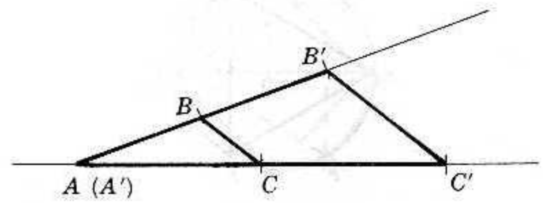

Fig. 15-35

Problemas complementarios

1. Dados los siguientes segmentos de línea de longitud a y b: $\overset{a}{\rule{4cm}{0.4pt}}$ $\overset{b}{\rule{3cm}{0.4pt}}$. Construya un segmento de línea cuya longitud sea igual a: (*a*) $a + b$; (*b*) $a - b$; (*c*) $2a + b$; (*d*) $a + 3b$; (*e*) $2(a + b)$; (*f*) $2(3b - a)$. (15.1)

2. Dados los segmentos de línea con longitudes a, b y c siguientes $\overset{a}{\rule{1cm}{0.4pt}}$ $\overset{b}{\rule{3.5cm}{0.4pt}}$ $\overset{c}{\rule{2.5cm}{0.4pt}}$. Construya un segmento de línea cuya longitud sea igual a: (*a*) $a + b + c$; (*b*) $a + c - b$; (*c*) $a + 2(b + c)$; (*d*) $b + 2(a - c)$; (*e*) $3(b + c - a)$. (15.1)

3. Dados los ángulos A y B (Fig. 15-36). Construya un ángulo que mida (*a*) $A + B$; (*b*) $A - B$; (*c*) $2B - A$; (*d*) $2A - B$; (*e*) $2(A - B)$. (15.2)

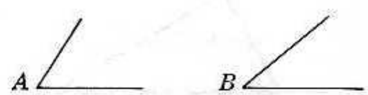

Fig. 15-36

4. Dados los ángulos A, B y C (Fig. 15-37). Construya un ángulo que mida (*a*) $A + C$; (*b*) $B + C - A$; (*c*) $2C$; (*d*) $B - C$; (*e*) $2(A - B)$. (15.2)

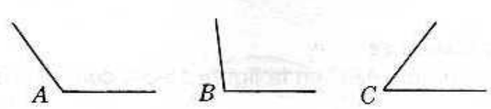

Fig. 15-37

5. En un triángulo rectángulo, construya (*a*) la bisectriz del ángulo recto; (*b*) la mediatriz de la hipotenusa; (*c*) la mediana sobre la hipotenusa. (15.3)

6. Para cada clase de triángulo (agudo, recto y obtuso), demuestre que los siguientes conjuntos de rayos y segmentos son concurrentes, es decir, que se intersectan en un punto: (*a*) las bisectrices; (*b*) las medianas; (*c*) las alturas; (*d*) las mediatrices. (15.3)

7. Dado el $\triangle ABC$ en la figura 15-38, construya (*a*) el suplemento del $\angle A$; (*b*) el complemento del $\angle B$; (*c*) el complemento de $\frac{1}{2}\angle C$. (15.4)

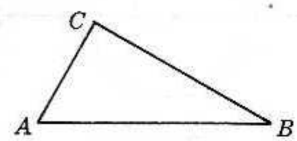

Fig. 15-38

8. Construya un ángulo cuya medida sea igual a: (*a*) $22\frac{1}{2}°$; (*b*) $67\frac{1}{2}°$; (*c*) $112\frac{1}{2}°$ (15.4)

9. Dado un ángulo agudo, construya (*a*) su suplemento; (*b*) su complemento; (*c*) la mitad de su suplemento; (*d*) la mitad de su complemento. (15.4)

10. Por medio de una construcción, demuestre que la diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo agudo es igual a 90° (15.4)

11. Construya un triángulo rectángulo dados sus (*a*) catetos; (*b*) hipotenusa y un cateto; (*c*) cateto y un ángulo agudo adyacente al cateto; (*d*) cateto y un ángulo agudo opuesto al cateto; (*e*) hipotenusa y un ángulo agudo. (15.5)

12. Construya un triángulo isósceles dado (*a*) un lado y el ángulo del vértice; (*b*) un lado y un ángulo de la base; (*c*) un lado y la altura sobre la base (*d*) la base y la altura sobre la base. (15.5)

13. Construya un triángulo rectángulo isósceles dados (*a*) un cateto; (*b*) la hipotenusa; (*c*) la altura sobre la hipotenusa. (15.5)

14. Construya un triángulo dados (*a*) dos lados y la mediana sobre uno de estos lados; (*b*) dos lados y la altura sobre uno de éstos; (*c*) un ángulo, la bisectriz del ángulo dado, y un lado adyacente al ángulo dado. (15.5)

15. Construya ángulos que midan 15° y 165°. (15.6)

16. Dado un ángulo de medida A, construya ángulos que midan (*a*) $A + 60°$; (*b*) $A + 30°$; (*c*) $A + 120°$. (15.6)

17. Construya un paralelogramo, dados (*a*) dos ángulos adyacentes y un ángulo; (*b*) las diagonales y el ángulo agudo en su intersección; (*c*) las diagonales y un lado; (*d*) dos lados adyacentes y la altura sobre uno de ellos; (*e*) un lado, un ángulo, y la altura sobre el lado dado. (15.8)

18. Circunscriba un triángulo a un círculo dado, si se dan los puntos de tangencia. (15.8)

19. La secante $\overleftrightarrow{AB}$ pasa por el centro del círculo O en la figura 15-39. Circunscriba un cuadrilátero al círculo de manera que A y B sean vértices opuestos. (15.8)

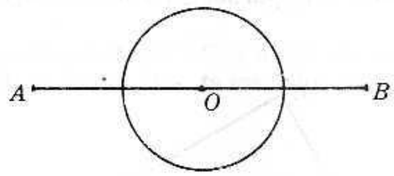

Fig. 15-39

20. Circunscriba e inscriba círculos a (*a*) un triángulo agudo; (*b*) un triángulo obtuso. (15.9)

21. Circunscriba un círculo a (*a*) un triángulo rectángulo; (*b*) un rectángulo; (*c*) un cuadrado. (15.9)

22. Construya los círculos inscrito y circunscrito a un triángulo equilátero. (15.9)

23. Localice el centro de un círculo trazado alrededor de una moneda de medio dólar. (15.9)

24. En un círculo dado, inscriba (*a*) un cuadrado; (*b*) un octágono regular; (*c*) un polígono regular de 16 lados; (*d*) un hexágono regular; (*e*) un triángulo equilátero; (*f*) un dodecágono regular.

25. Construya un triángulo similar a un triángulo dado con base (*a*) tres veces más grande; (*b*) la mitad de grande; (*c*) una y media veces más grande. (15.10)